Prof. Amador Martin-Pizarro
Übungen: Daniel Palacín

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2019/2020

Modelltheorie
Blatt 11
Abgabe: 04.02.2020, 14 Uhr

Aufgabe 1 (16 Punkte).

In der Sprache $\mathcal{L}$, welche die Gruppensprache enthält, sei T eine total transzendente abzählbare vollständige Theorie, deren Modelle unendliche Gruppen (möglicherweise mit Zusatzstruktur) sind.

a) Zeige, dass es in keinem Modell $\mathcal{M}$ von T eine unendliche absteigende Kette mit Parametern definierbarer Untergruppen $H_1 \gneq H_2 \gneq \ldots \gneq H_n \gneq \ldots$ gibt.

HINWEIS: Lagrange.

b) Ist die Theorie der Gruppe $(\mathbb{Z}, 0, +)$ in der Gruppensprache $\aleph_1$-kategorisch?

c) Gegeben $\mathcal{M}$ ein Modell von T sei $\mathcal{F}_M$ die Kollektion aller mit Parametern definierbarer Untergruppen H von M von endlichem Index. Zeige, dass

$$\bigcap_{H \in \mathcal{F}_M} H$$

eine definierbare Untergruppe von endlichem Index ist.

HINWEIS: Schätze den Index von $H_1 \cap H_2$ ab.

Im Folgenden bezeichnen wir mit $G^0_M[x]$ die Formel, welche den obigen Durschnitt definiert.

d) Gegeben eine $\mathcal{L}$-Formel $\varphi[x, \bar{y}]$ und eine natürliche Zahl d, zeige, dass es eine $\mathcal{L}$-Formel $\theta_{\varphi,d}[\bar{y}]$ so gibt, dass für jedes Tupel $\bar{b}$ aus M

$$M \models \theta_{\varphi,d}[\bar{b}] \;\Leftrightarrow\; \varphi[x, \bar{b}] \text{ definiert eine Untergruppe von } M \text{ von Index höchstens } d.$$

e) Wenn $\mathcal{M}$ eine elementare Unterstruktur von $\mathcal{N}$ ist, zeige, dass die Erfüllungsmenge $G^0_N(\mathcal{N})$ gleich $G^0_M(\mathcal{N})$ ist.

HINWEIS: Die Untergruppe $G^0_M(\mathcal{M})$ ist die kleinste definierbare Untergruppe von M von endlichem Index.

f) Schließe daraus, dass G^0_M ohne Parameter definierbar ist.

HINWEIS: Nimm eine saturierte Erweiterung $\mathcal{N}$ vom $\mathcal{M}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte).

In der Graphensprache $\mathcal{L} = \{R\}$ sei $\mathcal{A}$ eine saturierte freie Pseudoebene (siehe Aufgabe 1 auf Blatt 10). Gegeben eine endliche pfad-abgeschlossene Teilmenge C von A, beschreibe alle Elemente b aus A, welche eine algebraische Formel mit Parametern aus C erfüllen.

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden. Abgabe der Übungsblätter im Fach im Keller des mathematischen Instituts.